1. $(a_1\ a_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$

$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}(a_1\ a_2)=\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_1a_2\\b_2a_1 & b_2a_2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{matrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

7. 设A,B是样本空间Ω中的两个随机事件，若$P(B)>0$，则称$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为事件A在事件B发生的条件下的条件概率，同样若$P(A)>0$，则$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为事件B在事件A发生的条件下的概率

$P(AB)=P(B)P(A|B)$：$P(B)>0$时

$P(AB)=P(A)P(B|A)$：$P(A)>0$时

9. 均匀分布

区间$[a,b]$上的均匀分布的概率密度为 $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\0 & 其它\end{cases}$

对均匀分布的随机变量ξ来说，其落在$[a,b]$内任一子区间$[x_1,x_2]$内的概率为

$P\{x_1\le\xi\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$

$P\{-2<X<2\}=\int_{-2}^{2}P(x)dx=\int_{-2}^{1}0dx+\int_1^2\frac{1}{4}dx$

$=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

10. 参数为λ的指数概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\0, & x\le0\end{cases}$

对照公式

选择3. $(ka_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_1)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，题中两向量组的线性相(无)关性不同，所以此矩阵不可逆，即 $\begin{vmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0$，$k+1=0$，$k=-1$

4. 行列式的基本变换

$|a_1,ka_2,a_3|=k|a_1,a_2,a_3|$

$|a_1,3a_2,a_3|=3|a_1,a_2,a_3|$

所以 $|a_1,a_2,a_3|=4$

则 $|a_1,a_2,2a_3|=2|a_1,a_2,a_3|=8$

1、设$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$，则$BA^T=$ $\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$

2、设$\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}$，则$X=$ $\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&0\\0&\frac13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\\frac13&0\end{bmatrix}$

3、行列式$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&b&0\\1&1&c\end{vmatrix}=$ $abc+1-b$

4、已知行列式$|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=12$，则行列式$|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=$ 8

5、已知$\alpha_1=[-2,1,4]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$满足$3\alpha_2+2x=\alpha_1$，则$x=$ $\frac12(\alpha_1-3\alpha_2)=\frac12\alpha_1-\frac32\alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac52\\\frac12\\\frac72\end{pmatrix}$

6、设3阶矩阵A的特征值为$-1,0,1$，则$|A^3+2A|=$ 0

7、已知$P(A)=0.4,P(B|A)=0.7$，则$P(AB)=$ $P(B|A)P(A)=0.7\times0.4=0.28$

8、某射手向同一目标射击50次，每次击中目标的概率为$p=0.6$，请用算式表示"50次射击至多击中1次"的概率 $=P\{50次击中0次\}+P\{50次击中1次\}=C_{50}^0\times0.6^0\times0.4^{50}+C_{50}^1\times0.6\times0.4^{49}$

9、随机变量$X\sim U(1,5)$，则$P\{-2<X<2\}=$ $\frac14$

10、设随机变量X的概率密度为$\varphi(x)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x>0\\0, & x\le0\end{cases}$，则$A=$ 2

选择5. 二项分布的数学期望和方差的计算公式

$\xi\sim b(n,p)$，$P_k=C_n^kp^kq^{n-k}$ $(k=0,1,2,\dots,n)$

其中$p+q=1$

$E\xi=np$，$E\xi^2=n^2p^2-np^2+np$，$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=npq$

$np=2.4$，$npq=1.44$，得 $q=1.44/2.4=0.6$，$p=1-q=0.4$

$n=2.4/0.4=6$

6. 设$f(\lambda)=\lambda^3+2\lambda$，则有$f(A)=A^3+2A$，按照特征值的函数映射过程，可知$f(A)$的特征值为$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，即$-3,0,3$

再根据矩阵的行列式等于其所有特征值之积，可知 $|A^3+2A|=(-3)\times0\times3=0$

8. 独立试验序列，在n次试验中事件A恰好发生m次的概率为

$P_n(m)=C_n^mp^m(1-p)^{n-m}$，$(m=0,1,2,\dots,n)$

概率性质：

$0\le P(A)\le1$，$P(A+B)=P(A)+P(B)$

$P(A)=1-P(\bar A)$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

德摩根律 $\overline{A+B}=\bar A\bar B$

$\overline{AB}=\bar A+\bar B$

1、A为2阶方阵，且$|A|=2$，则$|(2A)^{-1}|=$ $(\lambda A)^{-1}=\frac1\lambda A^{-1}$，$|\lambda A|=\lambda^n|A|$ 以及 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ 可得

$|(2A)^{-1}|=|\frac12A^{-1}|=(\frac12)^2|A^{-1}|=\frac14|A|^{-1}=\frac14\times\frac12=\frac18$

2、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性方程组$Ax=b$的解，则下列是$Ax=0$的解是

由于$Aa_1=b$，$Aa_2=b$，$Aa_3=b$，$A(a_1-2a_2+a_3)=Aa_1-2Aa_2+Aa_3=b-2b+b=0$

3、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若要向量组$k\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性相关，则实数$k$需满足的条件是 $k=-1$

4、射击2次，$A_i=$"第i次射击击中目标"，则事件A_1+A_2表示 事件A_1与A_2至少有一个发生

5、已知随机变量$X\sim b(n,p)$，且$EX=2.4$，$DX=1.44$，则 $n=6$，$p=0.4$

三、$(A\pm I)^2=A^2\pm2A+I$，

$A^2-I^2=(A+I)(A-I)$

原式 $(A+I)X=A^2-I$

$(A+I)X=(A+I)(A-I)$

两边左乘$(A+I)^{-1}$，得

$X=A-I=\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}$

由于$|A+I|=\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}=2\ne0$，因此矩阵$A+I$是可逆的

三、已知矩阵A，X满足$AX+I=A^2-X$，且$A=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix}$，求矩阵$X$.

四、推论2.3.1，当A可逆时，$Ax=0$的唯一解是零解$x=0$；反之如果系数矩阵为n阶方阵的齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，则其系数行列式$D=|A|=0$.

四、说明齐次线性方程组$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\-3x_1+3x_2=0\end{cases}$有非零解，并求其通解.

解：$|A|=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-3&3&0\end{vmatrix}=0$，所有齐次线性方程组有非零解.

$A=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-3&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-9&-3\\0&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以原方程组同解方程组 $\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=-3x_2\end{cases}$，令$x_2=C$，

则通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$

五、设$X\sim N(1,4)$，已知$\Phi(1.25)=0.8944$，$\Phi(2.25)=0.9878$，求：(1) $P\{X>3.5\}$；(2) $P\{|X|\le3.5\}$.

$P\{\xi\le x\}=F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P\{\xi>x\}=1-P\{\xi\le x\}=1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P\{a<\xi\le b\}=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

解：(1) $P\{X>3.5\}=1-\Phi\left(\frac{3.5-1}{2}\right)=1-\Phi(1.25)=0.1056$

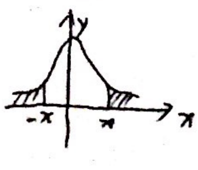
(2) $P\{|X|\le3.5\}=\Phi\left(\frac{3.5-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-3.5-1}{2}\right)=\Phi(1.25)-\Phi(-2.25)$

$=\Phi(1.25)-[1-\Phi(2.25)]=0.8822$

$|A|\ne0$，则矩阵A可逆，对给定的n阶方阵A，若存在同阶方阵B，使得$AB=BA=I$，则称矩阵A可逆，并称矩阵B为A的逆矩阵.

正态分布，μ与σ均为常数，$\sigma>0$，则称随机变量ξ服从参数为μ, σ的正态分布，记作$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$

特别地，当$\mu=0,\sigma=1$时，称$N(0,1)$为标准正态分布



六、连续型随机变量

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$

$P\{a<\xi\le b\}=\int_a^b\varphi(x)\,dx$

数学期望

$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx$

方差

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$

若随机变数—

先 ξ 是随机变量，

B、C是常量，则

$D(B\xi+C)=B^2D\xi$

1. $\beta^T\alpha=[1,-1,2]\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=5$

$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,-1,2)=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{vmatrix}$

$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=5\alpha\beta^T$

3. 相应定理，n阶方阵A, B

$|AB|=|A||B|$

4. $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&8\\4&t&10\end{vmatrix}$ 是一个方阵，可以用行列式

$|A|=0$，计算 $t=-12$

5. 求基础解系，　　全量化为行最简矩阵

$A=\to\begin{bmatrix}1&3&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1-2x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$

令 $x_3=c$，则 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c\\-c\\c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$，故所求

基础解系为 $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

6. 设 $f(\lambda)=\lambda^{-1}+1$，则有 $f(A)=A^{-1}+I$，由题知

A的特征值为1, 2, 3，故由谱映射定理可知

$f(A)=A^{-1}+I$ 的特征值为 $f(1), f(2), f(3)$，即

$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$，由于矩阵的行列式等于其所有特

征值之积，因此 $=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$

9. 因为 $DX=EX^2-(EX)^2$，所以 $EX^2=DX+(EX)^2$

$=4+(-2)^2=8$

从而 $E(3x^2+1)=E(3x^2)+E1$

$=3E(x^2)+1=3\times8+1=25$

(1) $P\{1<X<2\}=\int_1^2(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)\,dx$

$=(-\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{3}x^2)=\frac{13}{27}$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx$

$=\int_0^3 x(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)\,dx$

$=(-\frac{1}{18}x^4+\frac{2}{9}x^3)\Big|_0^3=\frac{3}{2}$

$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\,dx$

$=\int_0^3 x^2(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)\,dx$

$=(-\frac{2}{45}x^5+\frac{1}{6}x^4)\Big|_0^3=\frac{27}{10}$

$DX=E(x^2)-(EX)^2$

$=\frac{27}{10}-(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{20}$

(3) $DY=D(3X-2)=$

$3^2\times DX=\frac{81}{20}$

六、已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$

求：(1) X 落在区间 $(1,2)$ 内的概率；(2) X 的数学期望 EX 和方差 DX；(3) 随机变量 $Y=3X-2$ 的方差 DY

1、设 $\alpha=[1,2,3]^T$，$\beta=[1,-1,2]^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^2=$ $5\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{vmatrix}$

3、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，则 $\det(AB)=$ $|A||B|=-1\times12=-12$

4、已知 $\alpha_1=[1,2,4]^T$，$\alpha_2=[2,0,t]^T$，$\alpha_3=[3,8,10]^T$ 线性相关，则 $t=$ -12

5、线性方程组 $\begin{bmatrix}3&2&-4\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$

6、若3阶方阵 A 的特征值为1,2,3，则行列式 $\det(A^{-1}+I)=$ 4

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

7、已知 $P(A)=0.4, P(A-B)=0.3$，则 $P(AB)=$ 0.1

9、已知随机变量 X 满足 $EX=-2, DX=4$，则 $E(3X^2+1)=$ 25

1、设 A,B,C 为 n 阶方阵，若 $ABC=I$，则 $BCA=I$ 及 $CAB=I$

4、设 $P(A)=a, P(B)=b$，$P(A+B)=c$，则 $P(A\bar{B})=$ $c-b$

四、说明线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+x_3=4\\-x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 有唯一解，并用克拉默法则求出此唯一解。

7. $P(AB)=P(B|A)P(A)=0.7\times0.4=0.28$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=0.4+0.6-0.28=0.72$

4. $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c$

$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)$

四、$D=|A|=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&5\\1&3&2\\-1&0&0\end{vmatrix}=9\neq0$，根

据克拉默法则，非齐次线性方程组有唯一解。

$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\4&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=9$，$D_2=\begin{vmatrix}4&1&1\\1&4&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=18$，$D_3=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&4\\-1&1&0\end{vmatrix}=-9$

$x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=\frac{D_2}{D}=2$，$x_3=\frac{D_3}{D}=-1$，所以方

程组的唯一解是 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

1、$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\vdots\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$B^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&0\\-2&1&4\\1&0&-1\end{bmatrix}$

逆矩阵 $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

- 初等矩阵：由单位矩阵I经过一次初等变换后得到的方阵统称为初等矩阵
- 行阶梯矩阵：m×n矩阵称为行阶梯矩阵，满足下列条件：
  ① 若其行是零行，则其下的所有行都是零行
  ② 若其行是非零行，则其首非零元的列号一定大于上一行的首元的列号
- 行最简矩阵：首元均为1且首元所在列无其它非零元的行阶梯矩阵
- R是任意的m×n阶行阶梯矩阵，则称R中非零行的个数(即首元的个数)为行阶梯矩阵R的秩，记为r(R)

另外规定零矩阵的秩为零，即 $r(0)=0$

(行阶梯矩阵的秩即是非零行个数)

1、设 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}A=$ $\begin{vmatrix}2&3&0\\-2&1&4\\1&0&-1\end{vmatrix}$

2、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

2. 可以用上一题的解法，下面用分块矩阵求逆

令 $A_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&2\end{bmatrix}$，由于 $A_1^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

5、矩阵 $\begin{bmatrix}1&3&4\\2&4&6\end{bmatrix}$ 的秩等于 $\to\begin{vmatrix}1&3&4\\0&-2&-2\end{vmatrix}$，阶梯矩阵有两个非零行，所以秩为2

6. $A=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&-1&2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-7&-7\end{vmatrix}$

$\to\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$

6、齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\3x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

所得同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，令 $x_3=c$，

则 $\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-c\\-c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，基础解系为 $\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

7、已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.6, P(B|A)=0.7$，则 $P(A+B)=$ 0.72 (解析见第四题)

- 矩阵的秩：对于给定的m×n阶矩阵A，称其一切非零子式的最高阶数r为矩阵A的秩(rank)，记为r(A)
- 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是其系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即 $r(A)=r(\bar{A})$
- 对n元线性方程组 $Ax=b$，有如下结论：(非齐次)
  (1) 当且仅当 $r(A)\neq r(\bar{A})$ 时无解
  (2) 当且仅当 $r(A)=r(\bar{A})$ 时有解，此时，
  ① 仅当 $r(A)=n$ 时，方程组有唯一解
  ② 仅当 $r(A)<n$ 时，方程组有无数个解，其通解式中含有 $n-r(A)$ 个自由变量

- 齐次，对n元齐次线性方程组 $Ax=0$
  (1) 仅当 $r(A)=n$ 时，方程组只有零解
  (2) 当且仅当 $r(A)<n$ 时，方程组有非零解，通解式中带有 $n-r(A)$ 个自由变量
- 线性相关和线性无关

若存在一组不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得下式成立：

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$

则称n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，否则线性无关

线性相关无关的判别方法：

向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 相关的充要条件是它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 的秩小于向量个数m，即 $r(A)<m$，也即无关的充要条件是A的秩等于向量个数，即 $r(A)=m$

行列式判别法：只用于方阵，线性相关的充要条件是 $|A|=0$，无关的充要条件是 $|A|\neq0$

9. 正态分布

$EY=E(2X-1)=2EX-1=2\times0-1=-1$

$DY=D(2X-1)=2^2DX=4\times1=4$

1\. C^TB，C^T的列数不等于B的行数

- 可逆矩阵都是方阵，而且其逆矩阵也是同阶方阵
- 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的
- 可逆矩阵A的非零数乘λA也可逆，即$(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}(\lambda\neq0)$
- 两个同阶可逆矩阵A，B的乘积AB也可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- 可逆矩阵A的逆矩阵的转置矩阵就是其转置矩阵的逆矩阵，即$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$
- 可逆矩阵的逆矩阵是它本身，即$(A^{-1})^{-1}=A$
- 如果方阵A可逆，且$AB=I$，则$BA=I$
- 方阵A，B为同阶的可逆矩阵，且$A^{-1}+B^{-1}$也可逆，则$A+B$也可逆

$(A\pm B)^{-1}=\pm A^{-1}(A^{-1}\pm B^{-1})^{-1}B^{-1}$

4\. 克莱默法则

齐次线性方程组有唯一解，则系数行列式$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&k&1\end{vmatrix}\neq0$，得$k\neq4.5$

6\. 设λ是与ξ相对应的特征值，则$A\xi=\lambda\xi$，即$\begin{bmatrix}a&1\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，从而$\begin{bmatrix}a-2\\-2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，得$a=3$

2\. $\bar{A}=\begin{vmatrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\1&3&-2&-2a\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\0&4&-8&-2a\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\0&0&0&4-2a\end{vmatrix}$

$r(A)=2$，要使$r(A)=r(\bar{A})$

$4-2a=0$，$a=2$

8、已知连续性随机变量X的概率密度为$f(x)$，则X落在a和b之间的概率可以写成定积分 $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$

9、已知随机变量$X\sim N(0,1)$，随机变量$Y=2X-1$，则$Y\sim$ $N(-1,4)$

7\. 事件“A、B、C至少有一个发生”的逆事件为事件“A、B、C都不发生”，即$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，所以至少有一个发生$=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}=A+B+C$

至多有一个发生$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C=\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}$

分配律：

$(A+B)C=AC+BC$

$AB+C=(A+C)(B+C)$

德摩根定律

$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

8\. 指数分布

$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases}$

其中λ是一个正的常数，则称ξ服从参数为λ的指数分布，记为$\xi\sim E(\lambda)$

参数为4的指数分布密度函数为

$\varphi(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\leq0\end{cases}$

$P\{|X|<1\}=\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=\int_{-1}^{0}0dx+\int_0^1 4e^{-4x}dx=-e^{-4x}\Big|_0^1=1-e^{-4}$

1、设有矩阵$A_{2\times3},B_{3\times4},C_{4\times2}$，则下列运算无意义的是 C^TB

2、设A是可逆矩阵，则下列命题中错误的是 $A-I$也可逆

3、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$

1、设$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}$，则$BB^T-4AC=$ $\begin{bmatrix}-4&2\\-22&1\end{bmatrix}$

4、若$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$有唯一解，则常数$k=$ 4.5

5、已知$\alpha_1=[-2,1,4]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$，则$3\alpha_1-2\alpha_2=$ $\begin{pmatrix}-8\\3\\14\end{pmatrix}$

6、设$\xi=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$是矩阵$A=\begin{bmatrix}a&1\\4&3\end{bmatrix}$的一个特征向量，则常数$a=$ 3

7、A、B、C为三个随机事件，则事件“A、B、C至少有一个发生”可表示为 $A+B+C$，事件“A、B、C至多有一个发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}$

8、设随机变量X服从参数为4的指数分布，则概率$P\{|X|<1\}=$ $1-e^{-4}$

3\. 线性相关，$|A|=0$

4\. 每次成功的概率是p^2，至少失败一次是$1-p^2$

5\. $0=EY=E(aX+b)=aEX+b=2a+b$

$1=DY=D(aX+b)=a^2DX=4a^2$

解得 $a=\pm0.5$，$b=\mp1$

1、设2阶方阵A满足$A^2-I=O$，则必有 $A=A^{-1}$

2、方程组$\begin{cases}x_1-x_2+6x_3&=&0\\4x_2-8x_3&=&-4\\x_1+3x_2-2x_3&=&-2a\end{cases}$有解的充要条件是 $a=2$

非齐次线性方程组有解的充要条件是系数矩阵A的秩$r(A)$等于增广矩阵$\bar{A}$的秩$r(\bar{A})$

3、下列向量组中，线性无关的向量组是 B

A、(1,2,3),(5,6,7),(0,0,0) B、(1,2),(2,1),(1,1) C、(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1) D、(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)

$\begin{vmatrix}1&5&0\\2&6&0\\3&7&0\end{vmatrix}=0$　$|A|=1\neq0$　$|A|=0$　$|A|=0$

4、设每次试验成功的概率为p（$0<p<1$），则在2次重复试验中试验至少失败一次的概率为 $1-p^2$

5、已知随机变量$X\sim N(2,4)$，且随机变量$Y=ax+b\sim N(0,1)$，则 $a=\pm0.5$，$b=\mp1$ 选C

1、设$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&0&6\end{bmatrix}$，则$B^TA=$________.

1\. $\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0&1\times2+2\times1\\3\times1+0\times0&3\times2+0\times1\\5\times1+6\times0&5\times2+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\3&6\\5&16\end{pmatrix}$

2、设矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，则$\det(AA^T)=$ 144

2\. $\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&4&0\\3&0&0\end{vmatrix}=-1\times4\times3=-12$　$\det A^T=\det A=-12$

$\det(AA^T)=\det A\cdot\det A^T=(-12)^2=144$

3、已知方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+kx_3&=&1\\2x_1+4x_2+8x_3&=&3\end{cases}$无解，则常数$k=$ 4

4、已知$\alpha_1=[1,1,0,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,t,4]^T$，$\alpha_3=[2,1,-2,-2]^T$线性相关，则$t=$ 2

6、矩阵的$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&2\\0&8&2\end{bmatrix}$全部特征值为 1, -2, 6

6\. $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&2-\lambda&2\\0&8&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\8&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-6)=0$

A的三个特征值为1, -2, 6

3\. 非齐次线性方程组无解的充要条件是$r(A)\neq r(\bar{A})$。

$\bar{A}=\begin{vmatrix}1&2&k&1\\2&4&8&3\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&2&k&1\\0&0&8-2k&1\end{vmatrix}$

显然$r(\bar{A})=2$，要使$r(A)\neq r(\bar{A})$，

必须$8-2k=0$，即$k=4$

4\. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&1\\0&t&-2\\1&4&-2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&t&-2\\0&4&-4\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&t-2\\0&0&0\end{vmatrix}$

因为线性相关，所以$r(A)<3$=向量个数，故$t-2=0$，$t=2$

（相关的充要条件是$r(A)$小于向量个数，无关的充要条件是$r(A)$等于向量个数，行列式判别，方阵$|A|=0$相关，$|A|\neq0$无关）

8. 根据公式

$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

以及 $\Phi(+\infty)=1$ 可知，

$P\{X\ge 8\}=0.2=1-\Phi\left(\frac{8-4}{\sigma}\right)$，得 $\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right)=0.8$

因此根据公式 $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，注意到 $\Phi(0)=0.5$

得 $P\{0<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-4}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-4}{\sigma}\right)$

$=\Phi(0)-1+\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right)=0.5-1+0.8=0.3$

或者利用对称性可知，$P\{X>4\}=P\{X<4\}=0.5$

所以 $P\{0<X<4\}=P\{4<X<8\}=P\{X>4\}-P\{X\ge 8\}$

$=0.5-0.2=0.3$

4. $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

$P\{|X|>2\}=1-P\{|X|\le 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]=2\Phi(2)-1$

8、设随机变量 $X\sim N(4,\sigma^2)$，且 $P\{X\ge 8\}=0.2$，则 $P\{0<X<4\}=$ 0.3

1、设 A,B 为任意 n 阶矩阵，则下列命题中正确的是 B

A、$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　B、$(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$

C、$(AB)^2=A^2B^2$　　D、$AB^T=BA^T$

4、设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $P\{|X|>2\}$ 的概率为 $2\Phi(2)-1$

5、已知随机变量 X 服从参数为4的指数分布，则 ~~EX~~ $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，所以 $\frac{EX}{DX}=\lambda$

四、设 $A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}$，(1) 求 A 和 $(I-A^{-1})$ 的特征值；(2) 设矩阵 B 相似于 A，求行列式 $|B^2-B+I|$。

8. 二项分布 $\xi\sim b(n,p)$

设X表示学生答对的题数，则 $X\sim b(50,0.8)$

$E\xi=np$，

$E\xi^2=n^2p^2-np^2+np$

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=npq$

故 $EX=50\times0.8=40$，

$DX=50\times0.8\times0.2=8$

该生的得分 $Y=3X$，

因此 $EY=E(3X)=3EX=120$

$DY=D(3X)=9DX=72$

即标准差 $\sqrt{DY}=\sqrt{72}=6\sqrt2$

五、已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2\\ -\frac14x+b, & 2\le x\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$，且 $EX=2$，求：(1) 参数 a,b 的值；(2) 概率 $P\{1<X<3\}$；(3) X 的方差 DX。

4. 当 $a=1$ 时，$r(A)=1$，与题不符，当 $a\ne1$ 时，$A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&2-a-a^2\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{pmatrix}$，当且仅当 $a=-2$ 时，$r(A)=2$

4、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 的秩 $r(A)=2$，则 $a=$ -2.

8、某份试卷由50个单选题构成，每题有4个选项，正确得2分，不选或选错得0分，如果学生甲选对任一题的概率为0.8，则该生成绩的期望值为 72，标准差为 $6\sqrt2$

1、设 A,B 为 n 阶对称矩阵，则下列命题中正确的是 A、AB 必是对称矩阵　B、$A-B$ 必是反对称矩阵　C、$(AB)(AB)^T$ 必不是对称矩阵　D、$2A^T+3B$ 必是对称矩阵 D.

4、将一枚骰子掷两次，若先后出现的点数分别为 b,c，则方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率为 $\frac{19}{36}$

四、(1) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\-1&3-\lambda&-1\\-5&7&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&3-\lambda&-1\\1&7&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&5-\lambda&-1\\0&9&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)(\lambda-2)^2=0$

A的三个特征值为 1, 2, 2

设 $f(\lambda)=1-\lambda^{-1}$，则有 $f(A)=I-A^{-1}$

故根据映射定理 $f(A)=I-A^{-1}$ 的特征值为 $f(1),f(2),f(2)$，即 $0,\frac12,\frac12$

(2) 由于B相似于A，所以B与A有相同特征值，由(1)知B的特征值为 1, 2, 2 设 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$，则有 $g(B)=B^2-B+I$，根据映射定理，知 $g(B)=B^2-B+I$ 的特征值为 $g(1),g(2),g(2)$ 即 1, 3, 3

而根据行列式等于其所有特征值之积，因此行列式 $|B^2-B+I|=1\times3\times3=9$

五、(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^2axdx+\int_2^4(-\frac14x+b)dx+\int_4^{+\infty}0dx$

$=\frac12ax^2\Big|_0^2+(-\frac18x^2+bx)\Big|_2^4=2a+2b-\frac32$

$2=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^0x\cdot0dx+\int_0^2x\cdot axdx+\int_2^4x(-\frac14x+b)dx$

$+\int_4^{+\infty}x\cdot0dx=\frac13ax^3\Big|_0^2+(-\frac1{12}x^3+\frac12bx^2)\Big|_2^4$

$=\frac83a+6b-\frac{14}{3}$，得 $a=\frac14$，$b=1$.

(2) $P\{1<X<3\}=\int_1^2\frac14xdx+\int_2^3(-\frac14x+1)dx=\frac18x^2\Big|_1^2+(-\frac18x^2+x)\Big|_2^3$

$=\frac34$

(3) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^0x^2\cdot0dx+\int_0^2x^2\cdot\frac14xdx+\int_2^4x^2(-\frac14x+1)dx$

$+\int_4^{+\infty}x^2\cdot0dx=\frac1{16}x^4\Big|_0^2+(-\frac1{16}x^4+\frac13x^3)\Big|_2^4=\frac{14}{3}$

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{14}{3}-2^2=\frac23$