华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （一）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，则 $BA^T=$________.

2、设 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $X=$________.

3、行列式 $\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & b & 0\\ 1 & 1 & c\end{vmatrix}=$________________________________.

4、已知行列式 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=12$，则行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=$______.

5、已知 $\alpha_1=[-2,1,4]^T$， $\alpha_2=[1,0,-1]^T$ 满足 $3\alpha_2+2x=\alpha_1$，则 $x=$__________.

6、设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,0,1$，则 $|A^3+2A|=$ __________.

7、已知 $P(A)=0.4, P(B|A)=0.7$，则 $P(AB)=$______.

8、某射手向同一目标射击 50 次，每次击中目标的概率为 $p=0.6$，请用算式表示“50 次射击至多击中 1 次”的概率：________________________________.

9、随机变量 $X\sim U(1,5)$，则 $P\{-2<X<2\}=$ _____.

10、设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 $A=$_______.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 A 为 2 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|(2A)^{-1}|=$ 【 】

A、$\frac{1}{8}$ B、$\frac{1}{4}$ C、1 D、2

2、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，则下列是 $Ax=0$ 的解是 【 】

A、$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ B、$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ C、$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ D、$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若要向量组 $k\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，则实数 k 需满足的条件是 【 】

A、$k=-1$ B、$k\neq-1$ C、$k=1$ D、$k\neq1$

4、射击 2 次，$A_i=$“第 i 次射击击中目标”，则事件 A_1+A_2 表示　　　　【　　】

A、全部击中　B、至少击中一次　C、至多击中一次　　D、一次也没击中

5、已知随机变量 $X \sim b(n,p)$，且 $EX=2.4,\quad DX=1.44$，则　　　　【　　】

A、$n=4, p=0.6$　　B、$n=6, p=0.4$　　C、$n=8, p=0.3$　　D、$n=24, p=0.1$

三、（本题满分 10 分）

已知矩阵 A、X 满足 $AX+I=A^2-X$，且 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 X.

四、（本题满分 10 分）

说明齐次线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3 &= 0\\ x_1+2x_2+x_3 &= 0\\ -3x_1+3x_2 &= 0\end{cases}$ 有非零解，并求其通解.

五、（本题满分 10 分）

设 $X \sim N(1,4)$. 已知 $\Phi(1.25)=0.8944,\ \Phi(2.25)=0.9878$. 求：（1） $P\{X>3.5\}$；

（2） $P\{|X|\le 3.5\}$.

六、（本题满分 10 分）

已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

求：（1） X 落在区间 $(1,2)$ 内的概率；（2） X 的数学期望 EX 和方差 DX；

（3）随机变量 $Y=3X-2$ 的方差 DY.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （一）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）．要注意矩阵乘法不满足交换律.

解答： $A^T=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$，则 $BA^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times(-1)&1\times2+0\times0\\2\times1+3\times(-1)&2\times2+3\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$.

分析：第 2 题考察的知识点是计算矩阵方程 $AX=B$ 的解 $A^{-1}B$．要注意一些特殊矩阵的求逆公式，比如 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$（两调一除）以及 $\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{-1}&0\\0&\lambda_2^{-1}\end{bmatrix}$．另外要注意类似的矩阵方程 $XA=B$ 的解是 BA^{-1}，而不是 $A^{-1}B$.

解答： $X=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&0\\0&\frac13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\\frac13&0\end{bmatrix}$.

分析：第 3 题考察的知识点是行列式的计算．要注意对于简单的 2、3 阶行列式，可以使用对角线法则直接计算出结果.

解答： $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&b&0\\1&1&c\end{vmatrix}=a\times b\times c+0\times0\times1+1\times1\times1-1\times b\times1-0\times1\times c-a\times0\times1=abc+1-b$.

分析：第 4 题考察的知识点是行列式的性质．要注意区分行列式与矩阵运算上的异同.

解答：由于 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$，又由题知 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=12$，因此 $3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=12$，解得 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=4$，从而 $|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=8.$

分析：第 5 题考察的知识点是向量的运算．要注意向量作为特殊的矩阵，在运算上既要遵从矩阵运算的要求，也有自己的特殊情形.

解答： $x=\frac12(\alpha_1-3\alpha_2)=\frac12\alpha_1-\frac32\alpha_2=\frac12\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}-\frac32\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac12\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac32\\0\\-\frac32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac52\\\frac12\\\frac72\end{pmatrix}$.

分析：第 6 题考察的知识点是特征值的性质.

解答：设 $f(\lambda)=\lambda^3+2\lambda$，则有 $f(A)=A^3+2A$. 由题 A 的特征值为 $-1,0,1$，按特征值的谱映射定理，可知 $f(A)$ 的特征值为 $f(-1),f(0),f(1)$，即 $-3,0,3$. 再根据矩阵的

行列式等于其所有特征值之积，可知$|A^3+2A|=(-3)\times 0\times 3=0$.

分析：第 7 题考察的知识点是乘法公式.

解答：$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.7\times 0.4=0.28$.

分析：第 8 题考察的知识点是二项概型的计算公式.

解答：$P\{$50 次射击至多击中 1 次$\}=P\{$50 次射击击中 0 次$\}+P\{$50 次射击击中 1 次$\}$

$$=C_{50}^0\times 0.6^0\times 0.4^{50}+C_{50}^1\times 0.6\times 0.4^{49}\ .$$

分析：第 9 题考察的知识点是均匀分布的概率计算. 要注意随机变量取正值的范围.

解答：因为$X\sim U(1,5)$，所以X的密度函数为$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{5-1}, & 1<x<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，从而

$$P\{-2<X<2\}=\int_{-2}^{2}p(x)dx=\int_{-2}^{1}0dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{4}dx=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

分析：第 10 题考察的知识点是指数分布的概率密度，或者连续性随机变量概率密度的性质（规范性）.

解答：参数为λ的指数分布的概率密度为$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，对照概率密度的形式可知$A=2$.

另外按概率密度的性质（规范性），必须成立$1=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$，因此

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}Ae^{-2x}dx$$

$$=0-\frac{1}{2}Ae^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}(\lim_{x\to+\infty}Ae^{-2x}-A)=\frac{1}{2}A,$$

也可解得$A=2$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是行列式的性质. 要注意区分行列式与矩阵性质上的异同.

解答：利用$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$，　$|\lambda A|=\lambda^n|A|$以及$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，可得

$$|(2A)^{-1}|=|\tfrac{1}{2}A^{-1}|=(\tfrac{1}{2})^2|A^{-1}|=\tfrac{1}{4}|A|^{-1}=\tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{8}.$$ 故选 A.

分析：第 2 题考察的知识点是非齐次线性方程组的解与齐次线性方程组的解之间的关系. 要注意理解线性方程组的解的含义.

解答：由于$A\alpha_1=b, A\alpha_2=b, A\alpha_3=b$，所以

$$A(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1-A\alpha_2+A\alpha_3=b-b+b=b,$$

$$A(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2-A\alpha_3=b+b-b=b,$$

$$A(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)=A\alpha_1+2A\alpha_2-A\alpha_3=b+2b-b=2b,$$

$A(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1-2A\alpha_2+A\alpha_3=b-2b+b=0$，故选 D.

分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法. 可利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性.

解答：$(k\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. 由于可逆的表示矩阵不改变向量组的线性相（无）关性，而题中两向量组的线性相（无）关性不同，所以表示矩阵 $\begin{pmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 不可逆，即其行列式 $\begin{vmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0$，从而 $k+1=0$，$k=-1$.故选 A.

分析：第 4 题考察的知识点是事件的表示. 要注意区别两事件 A, B 的和 $A+B$ 与积 AB.

解答：A_1+A_2 表示事件 A_1 与 A_2 的和，即事件 A_1 与 A_2 中至少有一个发生. 故选 B.

分析：第 5 题考察的知识点是二项分布的期望和方差的计算公式.

解答：$X\sim b(n,p)$ 时，$EX=np,\quad DX=npq$，由题可知 $np=2.4,\quad npq=1.44$，解得 $q=1.44/2.4=0.6$，$p=1-q=0.4$，$n=2.4/0.4=6$. 故选 B.

第三题考察的知识点是解矩阵方程.

分析：类比字母代数的知识和技巧，要注意先化简矩阵方程，再代入数据计算. 另外要注意矩阵乘法不满足交换律，以及矩阵代数运算过程中相应的变形条件是否具备.

解答：$(A+I)X=A^2-I=(A+I)(A-I)$（注意乘积的顺序！）

上式两边只要左乘 $(A+I)^{-1}$，即得

$$X=A-I=\begin{bmatrix}2&1\\2&-1\end{bmatrix}.$$

由于 $|A+I|=\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，因此矩阵 $A+I$ 是可逆的.

第四题考察的知识点是解齐次线性方程组.

分析：要注意根据问题灵活选择求解齐次线性方程组的初等行变换法和行列式法，并恰当选取最简方程组中的主未知数.

解答：$|A|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$，所以齐次线性方程组有非零解.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -9 & -3\\ 0 & 9 & 3\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

所以原方程组同解于方程组$\begin{cases}x_1=x_2\\ x_3=-3x_2\end{cases}$.令$x_2=C$，则通解为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$.

第五题考察的知识点是正态分布的概率计算.

解答：根据公式$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$以及$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，并注意到$\Phi(+\infty)=1,\Phi(-\infty)=0$，可知

（1）$P\{X>3.5\}=1-\Phi\left(\dfrac{3.5-1}{2}\right)=1-\Phi(1.25)=0.1056$

（2）$P\{|X|\le 3.5\}=\Phi\left(\dfrac{3.5-1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{-3.5-1}{2}\right)=\Phi(1.25)-\Phi(-2.25)$

$=\Phi(1.25)-[1-\Phi(2.25)]=0.8822$

第六题考察的知识点是连续型随机变量的概率、期望和方差的计算，以及方差的性质.

分析：要注意概率密度取正值的区间.

解答：（1）$P\{1<X<2\}=\int_1^2(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)dx=(-\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{3}x^2)\big|_1^2=\frac{13}{27}$.

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^3 x(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)dx=(-\frac{1}{18}x^4+\frac{2}{9}x^3)\big|_0^3=\frac{3}{2}$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_0^3 x^2(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x)dx$

$=(-\frac{2}{45}x^5+\frac{1}{6}x^4)\big|_0^3=\frac{27}{10}$，

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{27}{10}-(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{20}$.

（3）$DY=D(3X-2)=3^2\times DX=\frac{81}{20}$.