华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （二）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设$\alpha=[1,2,3]^T,\beta=[1,-1,2]^T$， $A=\alpha\beta^T$，则$A^2=$__________.

2、设 3 阶方阵A满足$AB=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，其中$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&2\\1&4&3\end{bmatrix}$，则$A^{-1}=$__________.

3、设$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，则$\det(AB)=$__________________.

4、已知$\alpha_1=[1,2,4]^T$， $\alpha_2=[2,0,t]^T$， $\alpha_3=[3,8,10]^T$线性相关，则$t=$__________.

5、线性方程组$\begin{bmatrix}3&2&-4\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$的基础解系为____________.

6、若 3 阶方阵A的特征值为$1,2,3$，则行列式$\det(A^{-1}+I)=$__________.

7、已知$P(A)=0.4,P(A-B)=0.3$，则$P(AB)=$_______.

8、甲乙两射手独立地向同一目标各射击 1 次，其命中率分别为0.7和0.5. 现已知目标被击中，则该目标被乙击中的概率为_________________.

9、已知随机变量X满足$EX=-2,DX=4$，则$E(3X^2+1)=$ _________________.

10、总体X的概设率密度为$p(x)=\begin{cases}\theta x^{-\theta-1}, & x\ge 1\\ 0, & x<1\end{cases}$，其中，$\theta>1$为未知参数，

$X_1,\cdots,X_n$是X的随机样本，则参数θ的矩法估计$\hat{\theta}=$______________________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设A,B,C为n阶方阵，若$ABC=I$，则 【 】

A、$ACB=I$ B、$BAC=I$ C、$BCA=I$ D、$CBA=I$

2、满足$AA^T=A^TA=I$的矩阵A称为正交矩阵. 则下列矩阵中正交矩阵是【 】

A、$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ B、$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&1&2\end{bmatrix}$ C、$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}$ D、$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$

3、n阶方阵A相似于对角矩阵的充要条件是 【 】

A、A有n个互不相同的特征值 B、A有n个互不相同的特征向量

C、A有n个线性无关的特征向量 D、A有n个互不平行的特征向量

4、设 $P(A)=a, P(B)=b$，$P(A+B)=c$，则 $P(A\bar{B})=$ 【 】

A、$a-b$　　B、$c-b$　　C、$a(1-b)$　　D、$b-a$

5、设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=0.5$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=0.5$，则下列各式中正确的是 【 】

A、$P\{X=Y\}=0.5$　　B、$P\{X=Y\}=1$

C、$P\{X+Y=0\}=0.25$　　D、$P\{XY=1\}=0.25$

三、(本题满分 10 分)

已知矩阵 A,B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 B.

四、(本题满分 10 分)

说明线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3 &= 1\\ x_1+2x_2+x_3 &= 4\\ -x_1+x_2+x_3 &= 0\end{cases}$ 有唯一解，并用克拉默法则求出此唯一解.

五、(本题满分 10 分)

发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”和“－”. 由于通信系统受到干扰，当发出信号“·”时，收报台未必收到信号“·”，而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“·”和“－”；同样，当发出信号“－”时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“－”和“·”.

求：(1) 收报台收到信号“·”的概率；

(2) 当收报台收到信号“·”时，发报台确实发出信号“·”的概率.

六、(本题满分 10 分)

如图，一个小球从 M 处投入，通过管道自上而下落到 A 或 B 或 C. 已知小球从每个叉口落入左右两个管道的可能性是相等的. 某商家按上述投球方式进行促销活动，若投入的小球落在 A，B,C, 则分别设为 1,2,3 等奖.

(1) 已知获得 1,2,3 等奖的折扣率分别为 50%，70%，90%. 设随机变量 X 为获得 k 等奖的折扣率（$k=1,2,3$）. 求随机变量 X 的概率分布及期望 EX；

(2) 若有 3 人次（投入 1 球为 1 人次）参加促销活动，设设随机变量 Y 为获得 1 等奖或 2 等奖的人次，求概率 $P\{Y=2\}$.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （二）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的方幂. 要注意利用矩阵乘法的结合律简化计算，尤其是高次幂的计算.

解答： $\beta^T\alpha=[1,-1,2]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=5$， $A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,-1,2]=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{bmatrix}$，

$$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=5\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{bmatrix}.$$

分析：第 2 题考察的知识点是逆矩阵的性质和初等矩阵. 要注意掌握初等矩阵与初等变换的关系，以及初等矩阵的逆矩阵公式，比如 $C_{ij}(-k)^{-1}=C_{ij}(k)$.

解答：设 $AB=C$，显然 $C=C_{12}(-1)$，则 $C^{-1}=C_{12}(1)$.

因此 $A=CB^{-1}$， $A^{-1}=(CB^{-1})^{-1}=BC^{-1}=BC_{12}(1)=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&2\\1&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&1\\3&4&2\\1&5&3\end{bmatrix}$.

分析：第 3 题考察的知识点是行列式的性质和计算. 要注意特殊行列式的计算公式.

解答： $\det(A)=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$， $\det(B)=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot3=12$，

因此 $\det(AB)=\det(A)\det(B)=(-1)\cdot12=-12$.

分析：第 4 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判定方法. 要注意当向量组中向量个数等于向量的维数时，可以利用行列式法来判定向量组的线性相（无）关性.

解答： $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&8\\4&t&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&0\\4&t&-6\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&-1\\t&6\end{vmatrix}=-2(12+t)$，

因为 α_1， α_2， α_3 线性相关，所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$，即 $t=-12$.

分析：第 5 题考察的知识点是解齐次线性方程组. 要注意基础解系不唯一.

解答： $A=\begin{bmatrix}3&2&-4\\1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-7&-7\\1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$，

即得同解方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

令 $x_3 = C$，则 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C \\ -C \\ C \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，故所求基础解系为$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

分析：第 6 题考察的知识点是矩阵多项式的谱映射定理，即关于 A 的矩阵多项式的特征值与 A 的特征值之间的关系，以及矩阵特征值的性质.

解答：设 $f(\lambda) = \lambda^{-1} + 1$，则有 $f(A) = A^{-1} + I$. 由题 A 的特征值为$1, 2, 3$，按谱映射定理，可知 $f(A) = A^{-1} + I$ 的特征值为 $f(1), f(2), f(3)$，即 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$. 由于矩阵的行列式等于其所有特征值之积，因此行列式$\det(A^{-1} + I) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$.

分析：第 7 题考察的知识点是事件差的概率公式，即 $P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$.

解答：$P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$.

分析：第 8 题考察的知识点是事件的独立性. 要注意准确、简洁地表示事件.
解答：设 A 表示“甲击中目标”，B 表示“乙击中目标”，C 表示“目标被击中”，则 $P(A) = 0.7$，$P(B) = 0.5$. 由于 $C = AB + A\bar{B} + \bar{A}B = A + \bar{A}B$，所以

$$P(C) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B) = 0.7 + (1 - 0.7) \times 0.5 = 0.85,$$

其中 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$ 是因为 $\bar{A}$ 与 B 相互独立.

从而所求为 $P(B \mid C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{0.5}{0.85} = \frac{10}{17}$.

分析：第 9 题考察的知识点是期望的性质和方差的计算公式.

解答：因为 $DX = EX^2 - (EX)^2$，所以 $EX^2 = DX + (EX)^2 = 4 + (-2)^2 = 8$，

从而 $E(3X^2 + 1) = E(3X^2) + E1 = 3E(X^2) + 1 = 3 \cdot 8 + 1 = 25$.

分析：第 10 题考察的知识点是矩法估计. 要注意连续型随机变量取正值的范围.

解答：$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x \cdot \theta x^{-\theta-1} dx = \frac{\theta}{-\theta+1} x^{-\theta+1} \Big|_{1}^{+\infty} = \frac{\theta}{\theta - 1}$.

用样本均值替代总体的数学期望后，得方程 $EX = \bar{X}$，即 $\frac{\theta}{\theta - 1} = \bar{X}$.

解得参数 θ 的矩法估计 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - 1}$，这里 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是逆矩阵的定义. 要注意矩阵乘法交换律 $AB=BA$ 未必成立.
解答：由 $ABC=I$ 可得 $BCA=I$ 以及 $CAB=I$，所以答案是 C.
分析: 第 2 题考察的知识点是矩阵的乘法运算. 注意选取特殊位置来排除不正确的选项. 也可利用正交矩阵的性质，即正交矩阵的每列（行）都是单位向量，并且正交矩阵任何两列（行）内积（这里是点积）为零
解答：答案是 D.
分析：第 3 题考察的知识点是方阵的相似对角化. 注意区分充要条件和充分条件.
解答：答案是 D.

分析: 第 4 题考察的知识点是概率的性质. 要注意减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

解答：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c$

$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b$. 故选 B.

分析：第 5 题考察的知识点是二维离散型随机变量的独立性.

解答：$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=0.25$，

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1\}P\{Y=-1\}=0.25$，

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}P\{Y=1\}=0.25$，

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=0.25$，

所以 $P\{X=Y\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=0.5$，

$P\{X+Y=0\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}=0.5$，

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=0.5$. 故选 A.

第三题考察的知识点是解矩阵方程.

分析：要注意类比字母代数来化简矩阵方程，注意矩阵乘法不满足交换律，还要注意说明矩阵代数运算过程中是否具备相应的变形条件. 同时要熟练掌握特殊矩阵的求逆公式.

解答：等式两边右乘 A^{-1}，得 $A^{-1}B=6I+B$，

再移项，并提取公因式，得 $(A^{-1}-I)B=6I$，

由 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ 可知 $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$，$A^{-1}-I=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$，

因此 $(A^{-1}-I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$,

故所求 $B=6(A^{-1}-I)^{-1}=-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

第四题考察的知识点是解非齐次线性方程组.

分析：要注意掌握求解非齐次线性方程组的初等行变换法和克拉默法则，并根据问题情形灵活处理.

解答：$D=|A|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=9\neq 0$，根据克拉默法则，非齐次线性方程组有唯一解.

$D_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=9$，$D_2=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=18$，

$D_3=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-9$，

$x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=-1,$ 所以原方程组的唯一解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$.

第五题考察的知识点是全概公式和贝叶斯公式.

分析：要注意事件的准确表示.

解答：设 A 表示 {发报台发出信号“・ ”}，B 表示 {收报台收到信号“・ ”}，则 $\overline{A}$ 表示 {发报台发出信号“ – ”}，$\overline{B}$ 表示 {收报台收到信号“ – ”}；$B\,|\,A$ 表示 {发报台发出信号“・ ”后，收报台收到信号“・ ”}，$\overline{B}\,|\,A$ 表示 {发报台发出信号“・ ”后，收报台收到信号“ – ”}，$B\,|\,\overline{A}$ 表示 {发报台发出信号“ – ”后，收报台收到信号“・ ”}，$\overline{B}\,|\,\overline{A}$ 表示 {发报台发出信号“ – ”后，收报台收到信号“ – ”}.

由题，$P(A)=0.6$，$P(\overline{A})=0.4$，$P(B\,|\,A)=0.8$，$P(\overline{B}\,|\,A)=0.2$，$P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=0.9$，$P(B\,|\,\overline{A})=0.1$.

（1）由题可知 $B=AB+\bar{A}B$，所以

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$

$$=0.6\times 0.8+0.4\times 0.1=0.52$$

（2）显然 $A\mid B$ 表示事件｛收报台收到信号“•　”时，发报台确实发出信号“•　”｝，

所以 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{0.6\times 0.8}{0.52}=\dfrac{12}{13}.$

第六题考察的知识点是离散型随机变量的概率分布和期望，以及二项分布.

分析：本题为2010年浙江省高考理科试题.

解答：（1）由题得 X 的分布列为　（4分）

X	50%	70%	90%
p	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{7}{16}$

则 $EX=\dfrac{3}{16}\times 50\%+\dfrac{3}{8}\times 70\%+\dfrac{7}{16}\times 90\%=\dfrac{3}{4}.$（6分）

（2）由（1）知获得1等奖或2等奖的概率为 $\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{16}.$（8分）

由题可知 $Y\sim B(4,\dfrac{9}{16})$，所以 $P\{Y=2\}=C_4^2\cdot(\dfrac{9}{16})^2\cdot(1-\dfrac{9}{16})^2=\dfrac{49\cdot 3^5}{2^{15}}.$（10分）