华东理工大学继续教育学院成人教育《工程数学》课程

期末考试模拟试卷 （三）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}A=$__________.

2、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$__________.

3、已知 $A=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\b_1&b_2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}y_1&y_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}$，且 $|A|=2$，$|B|=3$，则行列式 $|A+B|=$_______.

4、已知行列式 $\begin{vmatrix}1&x&3\\x&2&0\\5&-1&4\end{vmatrix}$ 中 $(1,2)$ 元素的代数余子式 $A_{12}=8$，则 $(2,1)$ 元素的代数余子式 $A_{21}=$________.

5、矩阵 $\begin{bmatrix}1&3&4\\2&4&6\end{bmatrix}$ 的秩等于_____________.

6、齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3&=&0\\3x_1-x_2+2x_3&=&0\end{cases}$ 的基础解系为__________________.

7、已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.6,P(B|A)=0.7$，则 $P(A+B)=$_______.

8、已知连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则 X 落在 a 和 b 之间的概率可以写成定积分 __________.

9、已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y=2X-1$，则 $Y\sim$_________.

10、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu,\sigma>0$ 均未知. $X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的随机样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，这时检验 $H_0:\mu=0$ 的统计量 T（用 $\bar{X}$ 和 Q^2 表示）是________________________________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设有矩阵 $A_{2\times3},B_{3\times4},C_{4\times2}$，则下列运算无意义的是 【　　】

A、$C+(AB)^T$　　B、ABC　C、$(CA)^T-B$　　D、C^TB

2、设 A 是可逆矩阵，则下列命题中错误的是　　　　　　　　　　　　　【　　】

A、A^T 必可逆　B、A^2 必可逆　C、$-2A$ 必可逆　D、$A-I$ 必可逆

3、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是　　　　【　　】

A、$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　　B、$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$

C、$\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2$　　　D、$\alpha_1,2\alpha_3,3\alpha_1-4\alpha_3$

4、已知随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in G\\ 0, & x\notin G\end{cases}$，则区间 G 可以是【　　】

A、$[0,0.5\pi]$　　B、$[0.5\pi,\pi]$　　C、$[0,\pi]$　　D、$[\pi,1.5\pi]$

5、总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，这里方差 σ^2 未知时. $\bar{X}$ 为样本均值，s^2 为样本方差.在小样本条件下，总体均值在 $1-\alpha$ 置信水平下的置信区间可以写成　　　　　　【　　】

A、$\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$　　B、$\bar{X}\pm t_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$　C、$\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　　D、$\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\dfrac{s^2}{\sqrt{n}}$

三、（本题满分 10 分）

已知 2 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵 $(A^*)^{-1}$.

四、（本题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，并且向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\ k\\ 1\end{bmatrix}$ 是矩阵 A^{-1} 的一个特征向量，求 k 的值及与 α 对应的特征值 λ.

五、（本题满分 10 分）

已知某工厂生产甲、两种产品. 甲产品的一等品率为 80%，二等品率为 20%；乙产品的一等品率为 90%，二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品，若是一等品则获利 4 万元，若是二等品则亏损 1 万元；生产 1 件乙产品，若是一等品则获利 6 万元，若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各件产品相互独立.

（1）若 X 表示生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润，求 X 的概率分布；

（2）求生产 4 件甲产品所获得的总利润不少于 10 万元的概率.

六、（本题满分 10 分）

已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}3\theta^{-3}x^2, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，并且 $P\{X>1\}=\dfrac{7}{8}$

（1）求参数 θ 的值；（2）求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （三）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵乘法和初等矩阵的性质. 要注意掌握初等矩阵与初等变换的关系，以及初等矩阵的求逆公式，比如 $R_{ij}(-k)^{-1}=R_{ij}(k)$.

解答：显然 $B=R_{32}(2)$，则 $B^{-1}=R_{32}(2)^{-1}=R_{32}(-2)$.

从而 $B^{-1}A=R_{32}(-2)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&0\\-2&1&4\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

分析：第 2 题考察的知识点是特殊矩阵求逆矩阵的公式，即 $\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{bmatrix}$ 以及 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$（两调一除）.

解答：令 $A_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&2\end{bmatrix}$. 由于 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$，

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

分析：第 3 题考察的知识点是行列式的性质. 要注意行列式运算与矩阵运算的区别与联系.

解答：$|A+B|=\begin{vmatrix}x_1+y_1&x_2+y_2\\2b_1&2b_2\end{vmatrix}=2(\begin{vmatrix}x_1&x_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1&y_2\\b_1&b_2\end{vmatrix})$

$$=2(|A|+|B|)=2(2+3)=10.$$

分析：第 4 题考察的知识点是行列式的代数余子式. 注意元素的代数余子式只与该元素的位置有关，与该元素的值没有关系.

解答：$8=A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}x&0\\5&4\end{vmatrix}=-4x$，解得 $x=-2$.

因此 $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5.$

分析：第 5 题考察的知识点是矩阵秩的计算.

解答：$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$，阶梯形矩阵中有两个非零行，所以所求秩为 2 .

本题也可以利用向量组线性相（无）关性的几何意义。矩阵的两个行向量对应分量不成比例，因此不平行，这两个行向量线性无关，即对应的矩阵秩为 2 .

分析：第 6 题考察的知识点是解齐次线性方程组. 要注意基础解系不唯一.

解答：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

即得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$.

令 $x_3=C$，则 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -C \\ -C \\ C \end{bmatrix}=C\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，故所求基础解系为 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

分析：第 7 题考察的知识点概率的乘法公式和加法公式.

解答：$P(AB)=P(B\mid A)P(A)=0.7\times 0.4=0.28,$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.6-0.28=0.72$.

分析：第 8 题考察的知识点是连续型随机变量的概率计算公式，即 X 落在 a 和 b 之间的概率 $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$.

分析：第 9 题考察的知识点是正态分布随机变量的线性函数的分布. 注意正态分布随机变量的线性函数的分布仍然是正态分布，并且其期望和方差可以利用相关性质计算出来.

解答：$EY=E(2X-1)=2EX-1=2\times 0-1=-1$，

$DY=D(2X-1)=2^2DX=4\times 1=4$，所以 $Y\sim N(-1,4)$.

分析：第 10 题考察的知识点是正态总体统计量的分布和正态总体参数的假设检验. 要注意选择恰当的分布类型，并使用修正样本方差.

解答：修正样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Q^2$

因此 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}=\bar{X}\sqrt{\frac{n(n-1)}{Q^2}}.$

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、乘法和转置）．要注意做矩阵运算时对矩阵的维数要求.

解答： C^T 是 2×4 矩阵，而 B 是 3×4 矩阵， C^T 的列数不等于 B 的行数. 故选 D.

分析：第 2 题考察的知识点是逆矩阵的性质．要注意行列式与矩阵性质上的异同.

解答：由于 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$， $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$，$(-2A)^{-1}=(-2)^{-1}A^{-1}$，故选 D.

分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法．要注意掌握利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别线性相（无）关性的方法.

解答：由于 $(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$(\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$(\alpha_1,2\alpha_3,3\alpha_1-4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$

四个表示矩阵中，只有第二个表示矩阵可逆，而可逆矩阵不改变向量组的线性相（无）关性，故选 B.

分析：第 4 题考察的知识点是连续型随机变量概率密度的两个性质（非负性和规范性）.

解答：按非负性，排除选项 B,C,D. 同时注意到对于区间 $G=[0,0.5\pi]$，规范性条件

$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}0dx=1$ 成立，故选 A.

分析：第 5 题考察的知识点是正态总体参数的区间估计．要注意确定恰当的统计量及其分布.

解答：因为是小样本，而且总体方差 σ^2 未知，所以应该选择 T 统计量，并用样本方差 s^2 替代总体方差．故选 B.

第三题考察的知识点是伴随矩阵和逆矩阵的性质.

分析：要注意先化简再计算.

解答：由 $AA^*=|A|I$ 可知 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$，

而 $|A^{-1}|=-2$，$(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$，

所以 $(A^*)^{-1}=(-2)\cdot\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$.

第四题考察的知识点是特征值和特征向量的概念.

解答：由题知 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，故 $A\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$，即 $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$，也就是 $\begin{bmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$，

解得 $k=-1$ 或 $k=2$，相应地，$\lambda=0.5$ 或 $\lambda=0.2$.

第五题考察的知识点是离散型随机变量的概率分布以及二项分布.

本题为 2010 年江苏省高考理科试题.

解答：（1）由题 X 的可能取值为 $10,5,2,-3$，并且

$P\{X=10\}=0.8\times0.9=0.72$，$P\{X=5\}=0.2\times0.9=0.18$，

$P\{X=2\}=0.8\times0.1=0.08$，$P\{X=-3\}=0.2\times0.1=0.02$，

所以 X 的分布列为

X	10	5	2	-3
p	**0.72**	**0.18**	**0.08**	**0.02**

（2）设生产的四件甲等品中一等品有 n 件，则二等品有 $4-n$ 件.

由题设可知 $4n-(4-n)\geq 10$，解得 $n\geq\frac{14}{5}$，所以 $n=3$ 或 $n=4$.

因此所求概率为 $p=C_4^3\times0.8^3\times0.2+0.8^4=0.8192.$

第六题考察的知识点是连续性随机变量的概率、期望和方差的计算.

解答：显然 $\theta>1$，否则 $P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_1^{+\infty}0dx=0$ 与已知矛盾.

（1）$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_1^{\theta}3\theta^{-3}x^2dx+\int_{\theta}^{+\infty}0dx=\theta^{-3}x^3\Big|_1^{\theta}=1-\theta^{-3}$，

因此 $1-\theta^{-3}=\frac{7}{8}$，解得 $\theta=2$.

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{32}x^4\Big|_0^2=1.5$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{40}x^5\Big|_0^2=2.4$，

$DX=E(X^2)-(EX)^2=2.4-1.5^2=0.15$.