华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （四）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $BB^T-4AC=$_________.

2、设已知矩阵 A 满足 $A^3=2I$，则 $(A+2I)^{-1}=$________________.

3、行列式 $\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}=$_______________.

4、若 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ 有唯一解，则常数 $k=$_________.

5、已知 $\alpha_1=[-2,1,4]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$，则 $3\alpha_1-2\alpha_2=$___________.

6、设 $\xi=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则常数 $a=$__________.

7、A、B、C 为三个随机事件. 则事件“A、B、C 至少有一个发生”可表示为_________，事件“A、B、C 至多有一个发生”可表示为__________________.

8、设随机变量 X 服从参数为 4 的指数分布，则概率 $P\{|X|<1\}=$_________.

9、设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布为

X	-1	1
p	0.4	a

Y	-1	1
p	b	0.3

则 $ab=$ _____，$P\{X=Y\}=$_________.

10、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma>0$. $X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的随机样本，样本均值为

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $\bar{X}\sim$______________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 2 阶方阵 A 满足 $A^2-I=O$，则必有 【 】

A、$A=I$ B、$A=-I$ C、$A=A^{-1}$ D、$A=A^T$

2、方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_2 - 8x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2a \end{cases}$有解的充要条件是 【 】

A、$a = 2$ B、$a = -2$ C、$a = 3$ D、$a = -3$

3、下列向量组中,线性无关的向量组是 【 】

A、$(1,2,3),(5,6,7),(0,0,0)$ B、$(1,2),(2,1),(1,1)$

C、$(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$ D、$(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$

4、设每次试验成功的概率为p（$0 < p < 1$）, 则在 2 次重复试验中试验至少失败一次的概率为 【 】

A、p^2 B、$1 - p^2$ C、$(1-p)^2$ D、$(1-p)^2 + p(1-p) + p^2$

5、已知随机变量$X \sim N(2,4)$, 且随机变量$Y = ax + b \sim N(0,1)$, 则 【 】

A、$a = 2, b = 2$ B、$a = -2, b = 2$ C、$a = 0.5, b = -1$ D、$a = 0.5, b = 1$

三、(本题满分 10 分)

计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix}$.

四、(本题满分 10 分)

解线性方程组$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$.

五、(本题满分 10 分)

已知某次考试考生的成绩X（百分制）近似服从正态分布$N(72, \sigma^2)$, 且 96 分以上考生占考生总数的2.28%, 求考生的此次成绩X在 60 分到 84 分之间的概率.（$\Phi(1) = 0.8413,\ \Phi(2) = 0.9772$）

六、(本题满分 10 分)

设总体$X \sim U(a,b)$, 其概率密度为$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中$a, b$是未知参数. $X_1, \cdots, X_n$是X的随机样本, 试求a, b的矩法估计$\hat{a}, \hat{b}$.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （四）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第1题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）．要注意矩阵乘法不满足交换律.

解答：$BB^T-4AC=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}[2,1]-4\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2&0\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\-22&1\end{bmatrix}$.

分析：第2题考察的知识点是逆矩阵的定义．要注意类比字母代数的因式分解技巧.

解答：由于 $A^3+8I=(A+2I)(A^2-2A+4I)$，由题 $A^3=2I$，即 $A^3+8I=10I$，因式分解，得 $(A+2I)(A^2-2A+4I)=10I$，从而 $(A+2I)^{-1}=\dfrac{1}{10}(A^2-2A+4I)$.

分析：第3题考察的知识点是行列式的计算．要注意利用行列式的性质简化计算.

解答：$\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=2000$.

分析：第4题考察的知识点是克拉默法则．要注意齐次线性方程组是特殊的非齐次线性方程组.

解答：由于线性方程组有唯一解，根据克拉默法则，系数行列式$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&k&1\end{vmatrix}=0$，解得 $k=4.5$.

分析：第5题考察的知识点是向量的运算．要注意向量作为特殊的矩阵，在运算上要遵循矩阵运算的要求.

解答：$3\alpha_1-2\alpha_2=3\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\3\\14\end{pmatrix}$.

分析：第6题考察的知识点是矩阵特征值与特征向量的概念.

解答：设 λ 是与 ξ 相对应的特征值，则 $A\xi=\lambda\xi$，即 $\begin{bmatrix}a&1\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，从而 $\begin{bmatrix}a-2\\-2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. 解得 $a=3$.

分析：第7题考察的知识点是事件的表示．要注意准确、简洁地表示事件.

解答：事件“A、B、C 至少有一个发生”的逆事件为事件“A、B、C 都不发生”，即

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，所以事件“$A$、$B$、$C$ 至少有一个发生” $=\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=A+B+C$.

事件“A、B、C 至多有一个发生”包括事件“A、B、C 有且只有一个发生”以及“A、B、C 都不发生”，所以事件“A、B、C 至多有一个发生” $=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C=\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{C}$.

分析：第 8 题考察的知识点是指数分布的概率计算. 要注意熟练掌握指数分布的概率密度.

解答：参数为 4 的指数分布的密度函数为 $\varphi(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

因此 $P\{|X|<1\}=\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=\int_{-1}^{0}0dx+\int_{0}^{1}4e^{-4x}dx=-e^{-4x}\big|_0^1=1-e^{-4}$.

分析：第 9 题考察的知识点是离散型随机变量概率分布的规范性要求以及二维离散型随机变量的独立性.

解答：由离散型随机变量的规范性条件可知，$0.4+a=1$，$b+0.3=1$，解得 $a=0.6$，$b=0.7$，故 $ab=0.42$.

$$P\{X=Y\}=P\{X=Y=-1\}+P\{X=Y=1\}$$

$$=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}$$（因为 X 与 Y 相互独立）

$$=0.4\times0.7+0.6\times0.3=0.46.$$

分析：第 10 题考察的知识点是正态总体统计量的分布.

解答：因为 $\overline{X}$ 仍然服从正态分布，且 $E\overline{X}=\mu$，$D\overline{X}=\frac{1}{n}\sigma^2$，所以 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2)$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是逆矩阵的定义. 要注意字母代数与矩阵代数的异同.

解答：由于 $A^2=I$，所以 $A^{-1}=A$. 这里矩阵 A 是可逆的，是因为对 $A^2=I$ 两边求行列式，

并利用行列式的性质，可知 $|A^2|=|A|^2=|I|=1$，解得 $|A|=\pm1\ne0$. 故选 C.

分析：第 2 题考察的知识点是非齐次线性方程组有解的判别定理.

解答：非齐次线性方程组有解的充要条件是系数矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩

$r(\overline{A})$. 由于

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 4 & -8 & -4\\ 1 & 3 & -2 & -2a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 4 & -8 & -4\\ 0 & 4 & -8 & -2a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 4 & -8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 4-2a\end{bmatrix},$$

显然 $r(A)=2$，要使 $r(A)=r(\overline{A})$，必须 $4-2a=0$，即 $a=2$. 故选 A.

分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法. 要注意掌握利用表示

矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性的方法.

解答： A，C，D 三个选项对应的行列式分别是 $\begin{vmatrix}1&5&0\\2&6&0\\3&7&0\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，

$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3\\2&3&3\\3&3&3\end{vmatrix}=0$，只有第 2 个行列式非零，对应的矩阵可逆，从而相应的向量组线性无关. 另外对选项 B，显然有 $(1,2)+(2,1)=3(1,1)$. 故选 C.

分析： 第 4 题考察的知识点是 n 重贝努里试验. 要注意利用逆事件来简化计算.

解答： 事件"2 次重复试验中试验至少失败一次"的逆事件是事件"2 次重复试验中试验全部成功"，后者发生的概率是 p^2，所以前者发生的概率是 $1-p^2$. 故选 B.

分析： 第 5 题考察的知识点是正态分布随机变量的线性函数的分布. 注意正态分布随机变量的线性函数的分布仍然是正态分布，并且其期望和方差可以利用相关性质计算出来.

解答： $0=EY=E(aX+b)=aEX+b=2a+b$，

$1=DY=D(aX+b)=a^2DX=4a^2$，解得 $a=\pm 0.5$，$b=\mp 1$. 故选 C.

第三题考察的知识点是行列式的计算.

分析： 行列式的计算中，要注意尽量利用行列式的性质将行列式转化为特殊行列式，以简化计算.

解答： $x\neq 0$ 时，

$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&x&x\\1&x&0&x\\1&x&x&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&-x&0&0\\1&0&-x&0\\1&0&0&-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{3}{x}&1&1&1\\0&-x&0&0\\0&0&-x&0\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=\frac{3}{x}\cdot(-x)^3=-3x^2.$$

$x=0$ 时结论显然也成立.

第四题考察的知识点是用初等变换法解非齐次线性方程组.

分析： 要注意掌握主未知数的选取技巧.

解答： $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-5&2&11\\-3&1&-4&-5\\-1&-9&0&17\\5&3&6&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-5&2&11\\0&-14&2&28\\0&-14&2&28\\0&28&-4&-56\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&9&0&-17\\0&-7&1&14\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

$r(A)=r(\overline{A})=2<$ 未知数个数,所以方程组有无穷个解.

方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1&=&-17-9x_2\\x_3&=&14+7x_2\end{cases}$. 令 $x_2=C$,则方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

第五题考察的知识点是正态分布的概率计算公式.

解答：由题，据 $P\{X>96\}=0.0228$，而根据公式 $P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 以及 $\Phi(+\infty)=1$，可知 $1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=0.0228$，$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=1-0.0228=0.9772$，查表得 $\frac{24}{\sigma}=2$，即 $\sigma=12$.

注意到 $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，所求概率为

$$P\{60<X<84\}=\Phi\left(\frac{84-72}{12}\right)-\Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$=2\Phi(1)-1==0.6826.$$

第六题考察的知识点是矩法估计以及连续性随机变量的期望和方差的计算.

解答：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}$，

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b=\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2),$$

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

用样本均值替代总体的数学期望后，得方程组 $\begin{cases} EX = \bar{X} \\ DX = S^2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \frac{1}{12}(b-a)^2 = S^2 \end{cases}$，

解得参数 a,b 的矩法估计 $\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3}S,\ \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3}S$，这里 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2.$$