华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （五）

一、填空题（每小题4分，共40分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$，则 $B^TA=$________.

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\det(AA^T)=$________________.

3、已知方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+kx_3 &= 1\\ 2x_1+4x_2+8x_3 &= 3\end{cases}$ 无解，则常数 $k=$__________.

4、已知 $\alpha_1=[1,1,0,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,t,4]^T$，$\alpha_3=[2,1,-2,-2]^T$ 线性相关，则 $t=$_____.

5、已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个两两不相等的解，且 $\xi_1+\xi_2=[1,3,2]^T$，$\xi_3=[1,1,0]^T$. 当 $r(A)=2$ 时，$Ax=b$ 的通解为__________________.

6、矩阵的 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 8 & 2\end{bmatrix}$ 全部特征值为__________________.

7、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 X 的概率密度为_____，且概率 $P\{|X|<1\}=$_______________.

8、设随机变量 $X\sim N(4,\sigma^2)$，且 $P\{X\ge 8\}=0.2$，则 $P\{0<X<4\}=$_________.

9、设随机变量 $X\sim N(1,9)$，则随机变量 $Y=(\frac{X-1}{3})^2$ 必服从参数为____的_____分布.

10、设总体 $X\sim N(\mu,16)$，要使总体均值 μ 的置信区间长度 $L=1.12$，如果置信水平为 $1-\alpha=0.95$，则样本容量 n 必须等于______.

二、选择题（每小题4分，共20分）

1、设 A,B 为任意 n 阶矩阵，则下列命题中正确的是 【　　】

A、$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　B、$(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$

C、$(AB)^2=A^2B^2$　　D、$AB^T=BA^T$

2、设3阶方阵 A 的行列式为 3，2阶方阵 B 的行列式为 2，则 $\begin{vmatrix}A^{-1}A^* & O\\ O & B^T\end{vmatrix}=$ 【　　】

A、3　　B、6　　C、9　　D、36

3、向量组$(I): \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关的充要条件是　　【　　】

A、(I)中存在一个向量，不能由剩下的2个向量线性表出

B、(I)中任意一个向量都不能由剩下的2个向量线性表出

C、(I)中任意两个向量都线性无关

D、存在不全为零的常数k_1, k_2, k_3，使$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \neq 0$

4、设随机变量$X \sim N(0,1)$，则$P\{|X| > 2\}$的概率为　　【　　】

A、$2[1-\Phi(2)]$　　B、$2\Phi(2)-1$　　C、$2-\Phi(2)$　　D、$1-2\Phi(2)$

5、已知随机变量X服从参数为4的指数分布，则$\frac{EX}{DX} =$　　【　　】

A、0　　B、1　C、2　　D、4

三、（本题满分 10 分）

设 2 阶矩阵A满足$A^2 = I$.（1）证明$\det A = \pm 1$以及$A^{-1} = A$；（2）求出矩阵A.

四、（本题满分 10 分）

设$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$.（1）求$A$和$(I - A^{-1})$的特征值；（2）设矩阵$B$相似于$A$，求行列式$|B^2 - B + I|$.

五、（本题满分 10 分）

已知随机变量X的概率密度为$\varphi(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{4}x + b, & 2 \le x \le 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且$EX=2$. 求：（1）参数$a, b$的值；（2）概率$P\{1 < X < 3\}$；（3）$X$的方差$DX$.

六、（本题满分 10 分）

对总体$X \sim N(3.4, 6^2)$，$X_i (i = 1, \cdots, n)$为X的n个样本.（1）求出样本均值$\bar{X}$的标准化变量$\bar{Y}$及其服从的分布；（2）如果要求样本均值$\bar{X}$位于区间$(1.4, 5.4)$的概率不小于0.95，请问n至少应取多大？$\Phi(1.96) = 0.975$.

华东理工大学继续教育学院成人教育《工程数学》课程

期末考试模拟试卷 （五）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）. 要注意矩阵乘法不满足乘法交换律.

解答： $B^TA=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0&1\times2+2\times1\\3\times1+0\times0&3\times2+0\times1\\5\times1+6\times0&5\times2+6\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\3&6\\5&16\end{bmatrix}$.

本题也可利用初等矩阵与初等变换的关系。注意到 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=C_{12}(2)$，所以

$$B^TA=B^TC_{12}(2)=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\\5&6\end{bmatrix}C_{12}(2)=\begin{bmatrix}1&4\\3&6\\5&16\end{bmatrix}.$$

分析：第 2 题考察的知识点是行列式的性质. 要注意利用行列式的性质简化行列式的计算.

解答：由于 $\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&4&0\\3&0&0\end{vmatrix}=-1\cdot4\cdot3=-12$， $\det A^T=\det A=-24$，

所以 $\det(AA^T)=\det A\cdot\det A^T=(-12)^2=144$.

分析：第 3 题考察的知识点是非齐次线性方程组有解的判别定理.

解答：非齐次线性方程组无解的充要条件是系数矩阵 A 的秩 $r(A)$ 不等于增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩 $r(\overline{A})$. 由于 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&2&k&1\\2&4&8&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&k&1\\0&0&8-2k&1\end{bmatrix}$，显然 $r(\overline{A})=2$，要使 $r(A)\neq r(\overline{A})$，必须 $8-2k=0$，即 $k=4$.

分析：第 4 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法. 要注意掌握利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性的方法.

解答： $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&1\\0&t&-2\\1&4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&t&-2\\0&4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&t-2\\0&0&0\end{bmatrix}$,

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$r(A)<3=$向量组中向量个数，故$t-2=0$，即$t=2$.

分析：第 5 题考察的知识点是非齐次线性方程组解的结构。要注意掌握齐次线性方程组的解与非齐次线性方程组的解之间的关系.

解答：由 $A\xi_1=b,A\xi_2=b,A\xi_3=b$，可知

$$A\alpha=A(\xi_1+\xi_2-2\xi_3)=(A\xi_1+A\xi_2-2A\xi_3)=b+b-2b=0,$$

即$\alpha=\xi_1+\xi_2-2\xi_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$是齐次线性方程组$Ax=0$的解.

注意到$r(A)=2$，即$n-r(A)=3-2=1$，所以非齐次线性方程组$Ax=b$的通解可取为$\xi=\xi_3+C\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$.

分析：第 6 题考察的知识点是矩阵的特征值. 要注意掌握一些特殊矩阵的特征值的求法.

解答：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 8 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 8 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-6)=0$，

解得 A 的三个特征值为$1,-2,6$.

分析：第 7 题考察的知识点是连续型随机变量分布函数与概率密度之间的关系，以及指数分布的概率计算.

解答：由于连续型随机变量的概率密度是分布函数的导数，所以 X 的概率密度为

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

$P\{|X|<1\}=F(1)-F(-1)=(1-e^{-2})-0=1-e^{-2}$.

分析：第 8 题考察的知识点是正态分布的概率计算公式.

解答：根据公式 $P\{a<X<b\}=\Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 以及 $\Phi(+\infty)=1$ 可知

$\mathrm{P}\{\mathrm{X}\ge 8\}=0.2=1-\Phi\left(\dfrac{8-4}{\sigma}\right)$，得$\Phi\left(\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.8$.

因此根据公式$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，并注意到$\Phi(0)=0.5$，可得

$$P\{0<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-4}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-4}{\sigma}\right)=\Phi(0)-1+\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right)=0.5-1+0.8=0.3.$$

或者利用对称性可知，$P\{X>4\}=P\{X<4\}=0.5$，所以

$P\{0<X<4\}=P\{4<X<8\}=P\{X>4\}-P\{X\geq 8\}=0.5-0.2=0.3$.

分析：第 9 题考察的知识点是 χ^2 分布．要知道 χ^2 分布与标准正态分布的关系.

解答: 因为 $X\sim N(1,9)$，所以 $\frac{X-1}{3}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此 $Y=(\frac{X-1}{3})^2$ 服从参数为 1 的 χ^2 分布.

分析：第 10 题考察的知识点是正态总体参数的区间估计．要注意确定恰当的估计量和临界值.

解答：因为正态总体的方差已知，所以使用统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{4/\sqrt{n}}$，即在置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 下的置信区间为 $\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{X}\pm 1.96\dfrac{4}{\sqrt{n}}$，其置信区间长度 $L=2z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times 1.96\dfrac{4}{\sqrt{n}}$，由题可知 $2\times 1.96\dfrac{4}{\sqrt{n}}=1.12$，解得 $n=196$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的运算律．要注意字母代数与矩阵代数的异同.
解答：由于矩阵乘法一般不满足乘法交换律，所以选项 A,C,D 都不正确. 但是单位矩阵与任意矩阵可交换，即 $IA=AI=A$，所以 $(A+I)(A-I)=A^2-I=(A-I)(A+I)$.
故选 B.
分析：第 2 题考察的知识点是行列式的性质.

解答：由于 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$，$|A|^{-1}=|A|^{-1}$，$|AB|=|A||B|$，以及 $|A^*|=|A|^{n-1}$，$|A^T|=|A|$，所以

$$\begin{vmatrix} A^{-1}A^* & O \\ O & B^T \end{vmatrix}=|A^{-1}A^*||B^T|=|A^{-1}||A^*||B|=|A|^{-1}|A|^{3-1}|B|=|A||B|=3\times 2=6.$$

故选 D.
分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关的性质．要注意深刻理解向量组的线性相（无）关的定义。

解答：取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 显然它们两两线性无关，但是 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，选项 C 错．同时，取 $k_1=k_2=k_3=1$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq 0$，

选项 D 错. 若 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中 α_2 不能由 α_1,α_3 线性表出，但显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 选项 A 错. 故选 B.

分析：第 4 题考察的知识点是正态分布的概率计算. 要注意利用逆事件来简化计算.

解答：根据公式 $P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 以及 $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，可知 $P\{|X|>2\}=1-P\{|X|\le 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]=2\Phi(2)-1$. 故选 B.

分析：第 5 题考察的知识点是指数分布的期望公式和方差公式.

解答：参数为 λ 的指数分布的期望 $EX=\frac{1}{\lambda}$、方差 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$，所以 $\frac{EX}{DX}=\lambda$. 故选 D.

第三题考察的知识点是行列式的性质和矩阵的运算.

分析：要注意利用（1）的结论来简化问题（2）的求解.

解答：（1）对 $A^2=I$ 两边取行列式，并利用行列式的性质 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$，得

$$\det(A^2)=\det(A)^2=\det I=1，\text{即}\ \det A=\pm 1.$$

由于 $\det A=\pm 1\neq 0$，因此矩阵 A 可逆，注意到 $A^2=I$，所以 $A^{-1}=A$.

（2）设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，由（1）知 $ad-bc=\pm 1$，且 $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$.

当 $ad-bc=1$ 时可知 $d=a,b=-b,c=-c$，解得 $a=d=\pm 1,b=c=0$，此时逆 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$；当 $ad-bc=-1$ 时可知 $-d=a$，此时 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$ $(a^2+bc=1)$.

第四题考察的知识点是矩阵特征值的计算，矩阵多项式的谱映射定理，即关于 A 的矩阵多项式的特征值与 A 的特征值之间的关系，以及矩阵特征值的性质.

解答：（1）$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\-1&3-\lambda&-1\\-5&7&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&3-\lambda&-1\\1&7&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&5-\lambda&-1\\0&9&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(1-\lambda)(\lambda-2)^2=0,$$

解得 A 的三个特征值为 $1,2,2$.

设 $f(\lambda)=1-\lambda^{-1}$，则有 $f(A)=I-A^{-1}$. 按谱映射定理，可知 $f(A)=I-A^{-1}$ 的特征值为 $f(1),f(2),f(2)$，即 $0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$.

（2）由于矩阵 B 相似于 A，所以 B 与 A 有相同的特征值，由（1）可知 B 的三个特征值为 $1,2,2$. 设 $g(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$，则有 $g(B)=B^2-B+I$. 按谱映射定理，可知 $g(B)=B^2-B+I$ 的特征值为 $g(1),g(2),g(2)$，即 $1,3,3$. 再根据矩阵的行列式等于其所有特征值之积，因此行列式 $|B^2-B+I|=1\times3\times3=9$.

第五题考察的知识点是连续性随机变量概率密度的性质，概率计算公式，期望计算公式和方差计算公式.

分析：要注意概率密度函数取正值的区间.

解答：（1）
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}axdx+\int_{2}^{4}(-\tfrac{1}{4}x+b)dx+\int_{4}^{+\infty}0dx$$
$$=\tfrac{1}{2}ax^2\Big|_0^2+(-\tfrac{1}{8}x^2+bx)\Big|_2^4=2a+2b-\tfrac{3}{2},$$
$$2=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot0dx+\int_{0}^{2}x\cdot axdx+\int_{2}^{4}x(-\tfrac{1}{4}x+b)dx+\int_{4}^{+\infty}x\cdot0dx$$
$$=\tfrac{1}{3}ax^3\Big|_0^2+(-\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{1}{2}bx^2)\Big|_2^4=\tfrac{8}{3}a+6b-\tfrac{14}{3},$$
解得 $a=\frac{1}{4},b=1$.

（2）$P\{1<X<3\}=\int_1^2\frac{1}{4}xdx+\int_2^3(-\frac{1}{4}x+1)dx=\frac{1}{8}x^2\Big|_1^2+(-\frac{1}{8}x^2+x)\Big|_2^3=\frac{3}{4}$.

（3）
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot0dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\tfrac{1}{4}xdx+\int_{2}^{4}x^2(-\tfrac{1}{4}x+1)dx+\int_{4}^{+\infty}x^2\cdot0dx$$
$$=\tfrac{1}{16}x^4\Big|_0^2+(-\tfrac{1}{16}x^4+\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_2^4=\tfrac{14}{3},$$
$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\tfrac{14}{3}-2^2=\tfrac{2}{3}.$$

第六题考察的知识点是正态总体参数的区间估计.

解答：（1）由题知 $\bar{X}\sim N(3.4,\frac{1}{n}\cdot6^2)$，所以 $\bar{X}$ 的标准化变量 $\bar{Y}=\dfrac{\bar{X}-3.4}{6/\sqrt{n}}$ 仍然服从正态分布，且 $E\bar{Y}=0,D\bar{Y}=1$，即 $\bar{Y}\sim N(0,1)$.

（2）由题可知 $P\{1.4\le\bar{X}\le5.4\}=P\{|\bar{Y}|\le\dfrac{2\sqrt{n}}{6}\}=2\Phi(\dfrac{\sqrt{n}}{3})-1\ge0.95$.

所以 $\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geq 0.975$，从而 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geq 1.96$，即 $n\geq 34.5744$，所以 n 至少应取 35.