如果出现乱码，请下载 MathType5.4 或以上版本. 可以到 http://u.115.com/file/f579120942 下载.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （六）

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $P^{-1}AP=D$，其中 $P=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $A^3=$__________.

2、已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $M_{21}+M_{22}+M_{23}=$________________.

3、已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 1 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则常数 $t=$________.

4、设矩阵的 $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$ 的秩 $r(A)=2$，则 $a=$______.

5、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ 为已知矩阵，且 A 的特征值为 λ_1,λ_2,则 $\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2=$____________.

6、设 S 是不等式 $x^2-x-6\le 0$ 的解集，整数 $m,n\in S$. 事件 A 表示“使得 $m+n=0$ 成立的有序数组 (m,n)”，则 A 中的基本事件个数为______.

7、一个袋中装有 2 个白球和 n 个红球，每次从袋中摸出两个球（每次摸球后把这两个球放回袋中）. 若规定摸出的两个球颜色相同为中奖，否则为不中奖，则一次摸球即中奖的概率为______.

8、某份试卷由 50 个单选题构成，每题有 4 个选项，正确得 2 分，不选或选错得 0 分. 如果学生甲选对任一题的概率为 0.8，则该生成绩的期望值为______，标准差为____.

9、设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	0	2
0	$1/3$	a
2	b	$1/6$

已知事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=2\}$ 相互独立，则 $a=$_____, $b=$__________.

10、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的随机样本，样本均值为 $\bar{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i{}^2-\bar{X}^2$。设 $Q=\frac{1}{n-1}(a\sum\limits_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\bar{X}^2)$ 是总体方差 σ^2 的无偏估

计，则常数 $a=$______________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A,B 为 n 阶对称矩阵，则下列命题中正确的是 【　　】

A、AB 必是对称矩阵　　B、$A-B$ 必是反对称矩阵

C、$(AB)(AB)^T$ 必不是对称矩阵　　D、$2A^T+3B$ 必是对称矩阵

2、方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix}=0$ 的所有根为 【　　】

A、$0,1,2$　　B、$1,2,3$　C、$0,1,2,3$　　D、$1,2,3,4$

3、n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 存在非零解的充要条件是 【　　】

A、A 的行向量组线性无关　　B、A 的行向量组线性相关

C、A 的列向量组线性无关　　D、A 的列向量组线性相关

4、将一枚骰子抛掷两次，若先后出现的点数分别为 b,c，则方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率为 【　　】

A、$\dfrac{19}{36}$　　B、$\dfrac{1}{2}$　　C、$\dfrac{5}{9}$　　D、$\dfrac{17}{36}$

5、$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 是二维离散型随机变量 (X,Y) 的【　　】

A、联合概率分布 B、联合分布函数 C、概率密度　D、边缘概率分布

三、（本题满分 10 分）

设 n 阶矩阵 A 满足 $A^T=A^{-1}$ 以及 $\det A=-1$. 证明：$\det(A+I)=0$.

四、（本题满分 10 分）

已知向量组 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,b,4)^T$，且 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一，求 a,b 及 β 关于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性表示式.

五、（本题满分 10 分）

某同学参加 3 门课程的考试. 假设该同学第一门课程取得优秀成绩的概率为 0.8，第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 p、q $(p>q)$，且不同课程是否取得优秀成绩相互独立. 设 X 表示“该同学取得优秀成绩的课程数”，其概率分布为

X	0	1	2	3
p	0.048	a	b	0.192

求：（1）该同学至少有一门课程取得优秀成绩的概率；（2）p、q 的值；（3）数

学期望 EX .

六、（本题满分 10 分）

从一批产品中随机抽取 10 只，测得它们的厚度（单位：厘米）为

12.3, 12.4，12.6, 12.7 ,13.2 ，13.0 ,12.5, 12.4, 13.1, 12.8

假定厚度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu,\sigma>0$ 均未知.

求：（1） μ 的置信水平为 95%的置信区间；（2） σ^2 的置信水平为 95%的置信区间.

华东理工大学继续教育学院成人教育

《工程数学》课程期末考试模拟试卷 （六）详细分析及解答

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的方幂. 要注意利用矩阵乘法的结合律简化计算，尤其是高次幂的计算.

解答：由 $P^{-1}AP=D$ 知 $A=PDP^{-1}$，所以

$$A^3=(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1}\quad =PD^3P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^3&0\\0&2^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^3&0\\0&2^3\end{bmatrix}\cdot(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}0&-2\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&9\\0&-1\end{bmatrix}.$$

分析：第 2 题考察的知识点是余子式. 要注意余子式与代数余子式的区别.

解答： $M_{21}+M_{22}+M_{23}=\begin{vmatrix}4&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&4\\3&0\end{vmatrix}=4+2-12=-6$.

分析：第 3 题考察的知识点是齐次线性方程组有非零解的充要条件.

解答：设 $B=[b_1,b_2,b_3]$，因为 B 为非零矩阵，所以 b_1,b_2,b_3 中至少有一个是非零向量。再由 $AB=O$，知 $A[b_1,b_2,b_3]=0$，即 $Ab_1=Ab_2=Ab_3=0$，这意味着齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，因此 $|A|=0$. 由于

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2&-2\\1&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-2\\4&t+3&3\\4&0&1\end{vmatrix}=8(t+3),$$

所以 $8(t+3)=0$，即 $t=-3$.

分析：第 4 题考察的知识点是矩阵秩的计算.

解答：显然 $a=1$ 时 $r(A)=1$，与题设矛盾.

当 $a\neq 1$ 时， $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&2-a-a^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{bmatrix}$.

当且仅当$a=-2$时$r(A)=2$.

分析：第 5 题考察的知识点是矩阵特征值的性质.

解答：A的特征值为λ_1,λ_2，则A^2的特征值为λ_1^2,λ_2^2. 由于矩阵的特征值之和等于矩阵对角元之和，即矩阵的迹，因此 $\lambda_1^2+\lambda_2^2=tr(A^2)=a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2$.

分析：第 6 题考察的知识点是事件的表示.

解答：$S=\{x\mid x^2-x-6\le 0\}=\{x\mid -2\le x\le 3\}$. 由于整数$m,n\in S$，且$m+n=0$，则$A$中包含的基本事件为$(-2,2),(2,-2),(-1,1),(1,-1),(0,0)$，即个数为$5$.

分析：第 7 题考察的知识点是古典概型.

解答：由于一次摸球从$n+2$个球中任选两个，有C_{n+2}^2种选法，任何一个球被选出都是等可能的，其中两球颜色相同有$C_n^2+C_2^2$种选法，所以一次摸球中奖的概率为

$$p=\frac{C_n^2+C_2^2}{C_{n+2}^2}=\frac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}.$$

分析：第 8 题考察的知识点是二项分布的期望、方差.

解答：设X表示该生答对的题数，则$X\sim B(50,0.8)$，故$EX=50\times 0.8=40$，$DX=50\times 0.8\times 0.2=8$. 该生的得分为$Y=3X$，因此$EY=E(3X)=3EX=120$，$DY=D(3X)=9DX=72$，即标准差$\sqrt{DY}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

分析：第 9 题考察的知识点是二维离散型随机变量.

解答：由题意知，$\dfrac{1}{3}+a+b+\dfrac{1}{6}=1$，即$a+b=\dfrac{1}{2}$，并且

$P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}+a$，$P\{X=2\}=b+\dfrac{1}{6}$，$P\{Y=0\}=\dfrac{1}{3}+b$，$P\{Y=2\}=a+\dfrac{1}{6}$，

$P\{X+Y=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=2,Y=0\}=a+b$，

因此$P\{X=0,X+Y=2\}=P\{X=0,Y=2\}=a$.

由于事件$\{X=0\}$与事件$\{X+Y=2\}$相互独立，所以

$P\{X=0,X+Y=2\}=P\{X=0\}P\{X+Y=2\}$，即$a=(\dfrac{1}{3}+a)(a+b)$.

把$b=\dfrac{1}{2}-a$代入上式，并整理得，$a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{6}$.

分析：第 10 题考察的知识点是统计量的无偏估计.

解答：$EQ=\frac{1}{n-1}E(a\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2)=\frac{n}{n-1}E(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2)=\sigma^2$，即

$E(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，

而$E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，所以$E(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2)=E(S^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2)$，

整理可得$\frac{a-1}{n}E\sum_{i=1}^{n}X_i^2=0$，因此$a=1$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的运算律和对称（反对称）矩阵的概念. 要注意字母代数与矩阵代数的异同.

解答：因为A,B为n阶对称矩阵，即$A^T=A,\ B^T=B$，所以$(AB)^T=B^TA^T=BA$，但$AB\neq BA$，所以$(AB)^T\neq AB$，故选项A错；$(A-B)^T=A^T-B^T=A-B\neq-(A-B)$，故选项$B$错；$[(AB)(AB)^T]^T=[(AB)^T]^T(AB)^T=(AB)(AB)^T$，即$(AB)(AB)^T$是对称矩阵，故选项$C$错；$(2A^T+3B)^T=(2A^T)^T+(3B)^T=2A+3B)^T=2A+3B$，故选$D$.

分析：第 2 题考察的知识点是行列式的性质. 要注意这里不必计算出行列式.

解答：从左边行列式的对角元可知此方程是关于x的 3 次方程. 分别代入$x=1,2,3$，注意到此时行列式中都有两行对应相等，因此都为零，故$1,2,3$都是方程的根. 故选C.

分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性无（相）关与齐次线性方程组没有（有）非零解的关系.

解答：设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，则齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$存在非零解意味着存在一组不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$，此即$A$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关. 故选$D$.

分析：第 4 题考察的知识点是事件的表示.

解答：由于b,c都有 6 种取值，所以有序数组(b,c)有 36 种可能结果. 方程$x^2+bx+c=0$有实根需满足$b^2-4c\geq 0$，只有以下 19 种符合要求：$(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),$.
故选A.

分析: 第 5 题考察的知识点是二维离散型随机变量. 要注意区分二维离散型随机变量的联合概率分布，边缘分布和条件分布，以及三者之间的关系.

解答： 选 $\boldsymbol{D}$.

第三题考察的知识点是行列式的性质.

分析： 要注意单位阵技巧.

解答： 由 $A^T = A^{-1}$ 可知 $A^T A = A^{-1}A = I$，再根据行列式的性质 $\det(A^T) = \det A$，

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$，可知

$$\det(A+I) = \det(A + A^T A) = \det[(I + A^T)A]$$

$$= \det[(I+A)^T A] \quad (\text{根据性质}\ (A+B)^T = A+B)$$

$$= \det(I+A)^T \det A = -\det(I+A)^T = -\det(I+A),$$

此即 $\det(I+A) = -\det(I+A)$，因此 $\det(A+I) = 0$.

第四题考察的知识点是向量组的线性表示以及解非齐次线性方程组.

分析： 要注意将向量组的线性表示问题转化为非齐次线性方程组的求解问题.

解答： 设有一组数 x_1, x_2, x_3，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$，则得非齐次线性方程组

$Ax = \beta$，这里 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$. 此时题中所给条件即转化为 $Ax = \beta$ 有无穷多解. 根据非齐次线性方程组有解的判定定理，这又等价于 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$. 由于

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix},$$

解得 $a = 1, b = 2$，此时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$.

当 $a = 1, b = 2$ 时，$\bar{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

可求得方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2C \\ 2+C \\ C \end{pmatrix}$, 因此 β 关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性表示式为

$\beta=(-1-2C)\alpha_1+(2+C)\alpha_2+C\alpha_3$，这里 C 为任意常数.

第五题考察的知识点是离散型随机变量的概率计算及期望.

分析：要注意准确、简洁地表示事件. 本题为 2010 北京高考理科试题.

解答：设 A_i 表示“该同学第 i 一门课程取得优秀成绩”（$i=1,2,3$），由题意知

$$P(A_1)=0.8,\ P(A_2)=p,\quad P(A_3)=q.$$

（1）由于事件“该同学至少有一门课程取得优秀成绩”的逆事件是“该同学没有一门课程取得优秀成绩”，即事件 $X=0$，因此“该同学至少有一门课程取得优秀成绩”的概率为

$$1-P\{X=0\}=1-0.048=0.952.$$

（2）由题意知

$$P\{X=0\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0.2(1-p)(1-q)=0.048,$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.8pq=0.192,$$

整理得 $pq=0.24$，$p+q=1$，注意到 $p>q$，解得 $p=0.6,q=0.4$.

（3）由题意知

$$a=P\{X=1\}=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=0.8(1-p)(1-q)+0.2p(1-q)+0.2(1-p)q=0.296,$$

$$b=1-a-0.048-0.192=0.464,$$

所以 $EX=0\times0.048+1\times0.296+2\times0.464+3\times0.192=1.8$.

第六题考察的知识点是正态总体参数的区间估计.

解答：$n=10$，样本均值 $\bar{X}=12.7$，样本方差 $S^2=0.1$.

（1）对 $1-\alpha=0.95$，$1-\alpha/2=0.975$，自由度为 $n-1=9$，查 t 分布表，得临界值 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622$. 因此 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\bar{X}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=12.7\pm2.2622\times\frac{\sqrt{0.1}}{\sqrt{10}}=12.7\pm0.2262.$$

（2）对 $1-\alpha=0.95$，$1-\alpha/2=0.975$，自由度为 $n-1=9$，查 χ^2 分布表，得临界值 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=2.7,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=19.023$. 因此 σ^2 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=19.023},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)=(0.04731,0.33333).$$